Dzień dobry

Podaję Państwu tematy z matematyki zaplanowane na dzień 27, 28, 29.11.2020r.

1. Pochodna funkcji.
2. Pochodna funkcji w punkcie.
3. Interpretacja geometryczna pochodnej.
4. Funkcja pochodna.
5. Działania na pochodnych.
6. Interpretacja fizyczna pochodnej.
7. Funkcje rosnące i malejące.
8. Ekstrema funkcji.
9. Wartość najmniejsza i wartość największa funkcji.
10. Szkicowanie wykresu funkcji.

Ad. 1

Tw. Współczynnik kierunkowy prostej y=ax+b jest równy tangensowi kąta alfa, jaki ta prosta tworzy z osią OX: tg alfa = a

Współczynnik kierunkowy obliczymy ze wzoru a= y2-y1/x2-x1 gdzie (x1,y1) oraz (x2,y2) to pary punktów, przez które przechodzi prosta.

Ad.2

Def. Jeśli istnieje skończona granica lim f(x)-fx0)/x-x0 to granicę tę nazywamy

 x dąży do x0

pochodną funkcji f w punkcie x0 i oznaczamy f’(x0)

 f’(x0)= lim f(x)-fx0)/x-x0

 x dąży do x0

Przeanalizuj przykład 1 str. 285

Oblicz pochodną funkcji f(x) = x2

Oblicz pochodną funkcji f(x) = x3

Na razie obliczamy zgodnie z definicją czyli korzystamy ze wzoru

f’(x0)= lim f(x)-fx0)/x-x0

 x dąży do x0

Ad. 3.

Przeanalizuj interpretację geometryczną pochodnej, wykonaj przykładowe rysunki ze str. 286.

Przeanalizuj przykład 2 oraz przykład z ramki str. 286 i 287

Ad. 4

W wypadku niektórych funkcji można wykazać, że mają one pochodną w każdym punkcie dziedziny. Takie funkcje nazywamy różniczkowalnymi.

Na przykład funkcja f(x)=x2 ma pochodną w dowolnym punkcie x0 należącym do R.

Po obliczeniu granicy ze wzoru f’(x0)= lim f(x)-fx0)/x-x0

 x dąży do x0

otrzymujemy f’(x0)=2x0

Mamy więc dwie funkcje – funkcję f: R daną wzorem f(x) = x2,

oraz funkcję f’: R daną wzorem f’(x) = 2x.

Def.

Jeśli funkcja f ma pochodną w każdym punkcie x pewnego zbioru (będącego przedziałem otwartym lub sumą przedziałów otwartych), to w tym zbiorze określona jest funkcja y = f’(x), zwana funkcją pochodną funkcji f lub krótko pochodną funkcji f.

**Dla dowolnej różnej od zera liczby całkowitej n: (xn)’=nx n-1 dla x≠0.**

Wzory na pochodne:

(c)’ = 0, gdzie c- stała

(x)’ =1

(x2)’=2x

(x3)’=3x2

(1/x)’= -1/x2 dla x≠0

(√x)’=1/2√x dla x>0

Przykład:

Oblicz pochodną funkcji f(x)=x2 w punkcie x0=7

f’(x) = 2x, zatem f’(7) = 2\*7=14.

1. Oblicz pochodną funkcji f(x) = x3 w punkcie x0= -5.
2. Rozwiąż równanie f’(x) = 2.
3. f(x)=x2
4. f(x)=√x

Def. Jeśli funkcja f ma w punkcie x0 pochodną, to styczną do wykresu tej funkcji w punkcie (x0;f(x0)) jest prosta o równaniu:

y-f(x0)=f’(x0)(x-x0)

Przeanalizuj powyższe równanie stycznej na przykładzie 3 str. 289.

Ad.5

Tw. Jeśli funkcja f ma pochodną w punkcie x oraz c jest dowolną stałą, to: (c\*f(x))’=c\*f’(x)

Przykład: (3x2)’=3(x2)’=3\*2x=6x

(6x4)’=6(x4)’=6\*4x3=24x3

Pochodna sumy i pochodna różnicy funkcji

Jeśli funkcje f i g mają pochodne w punkcie x, to:

(f(x)+g(x))’ = f’(x)+g’(x) oraz (f(x)-g(x))’= f’(x)-g’(x)

Przykład:

(x2+3x-1)’=(x2)’+3(x)’-(1)’=2x+3

Pochodna iloczynu funkcji

Jeśli funkcje f i g mają pochodne w punkcie x, to:

(f(x)\*g(x))’=f’(x)\*g(x)+f(x)\*g’(x)

Przykład:

((x2+1)(x3-4))’=2x(x3-4)+(x2+1)3x2=5x4+3x2-8x

Pochodna ilorazu funkcji

Jeśli funkcje f i g mają pochodne w punkcie x oraz g(x)≠0, to:

((f(x)/g(x))’= (f’(x)\*g(x)-f(x)\*g’(x))/(g(x))2

Przykład:

(x2/x-1)’= ((x2)’\*(x-1)-x2\*(x-1)’)=(2x(x-1)-x2\*1)/(x-1)2=(x2-2x)/(x-1)2 dla x≠1

((1/g(x))’= - g’(x)/(g(x))2

Funkcje sinus, cosinus tangens, cotangens mają pochodną we wszystkich punktach swojej dziedziny:

(sin x)’ = cos x, x należy do R

(cos x)’ = - sin x, x należy do R

(tg x)’ = 1/cos2x, x należy do R z wyjątkiem pi/2+kpi: k należy do C

(ctg x)’= - 1/sin2x, x należy do R z wyjątkiem kpi: k należy do C

Przeanalizuj wszystkie przykłady str. 291-294 i rozwiąż zad 1a,b,c/292

Ad. 6

Pochodną można wykorzystać w fizyce albo zinterpretować ją fizycznie.

Na przykład prędkość chwilowa jest pochodną położenia względem czasu.

v(t0)=s’(t0)

Przeanalizuj wykres i przykład 1 str. 295

Przypuśćmy, że funkcja v opisuje prędkość punktu poruszającego się po osi liczbowej w zależności od czasu t (najpierw było 0 potem v(t0) następnie v(t).

Przyśpieszenie średnie w przedziale od t0 do t wyraża się za pomocą wzoru:

aśr= (v(t)-v(t0))/t-t0

Przyśpieszenie a(t0) w chwili t0 jest pochodną prędkości:

a(t0)= lim (v(t)-v(t0)/t-t0

 t dąży do t0

Rozwiąż zadanie 4a str. 297

Ad.7

Tw.

Jeśli funkcja f w pewnym przedziale (a; b) jest rosnąca i ma pochodną, to f’(x)≥0 dla każdego x należącego do przedziału (a; b).

Jeśli funkcja f w pewnym przedziale (a; b) jest malejąca i ma pochodną, to f’(x)≤0 dla każdego x należącego do przedziału (a; b).

Pochodna funkcji stałej w pewnym przedziale jest w tym przedziale równa 0.

Przykład;

Funkcja f(x)=1/2x2-3

Naszkicuj wykres funkcji.

Pochodna funkcji f’(x)=x

f’(x)≤0 dla x należących do przedziału (-∞;0>

f’(x)≥0 dla x należących do przedziału <0;∞)

Wobec powyższego funkcja jest malejąca w przedziale (-∞;0>

Funkcja jest rosnąca w przedziale <0;∞) (to są przedziały jednostronnie domknięte)

Wyznacz przedziały monotoniczności funkcji f(x) = 1/3x3+x2-3x

(patrz przykład 3 str. 301)

Jeśli funkcja jest rosnąca w przedziale (a; b) i jest ciągła w przedziale <a; b>, to jest rosnąca w przedziale <a; b>

Wykonaj zad. 2 i 3 str. 302

Ad. 8

Def.

Funkcja f przyjmuje w punkcie x0 minimum lokalne f(x0), jeśli istnieje ð>0 takie, że dla każdego x należącego do przedziału (x0-ð; x0+ð) i x≠x0 zachodzi nierówność f(x)>f(x0).

Funkcja f przyjmuje w punkcie x0 maksimum lokalne f(x0), jeśli istnieje ð>0 takie, że dla każdego x należącego do przedziału (x0-ð; x0+ð) i x≠x0 zachodzi nierówność f(x)<f(x0).

Warunek konieczny istnienia ekstremum:

Jeśli funkcja f ma pochodną w punkcie x0 i osiąga w tym punkcie ekstremum,

to f’(x) = 0

Przeanalizuj przykład 1 str. 303.

Warunek wystarczający istnienia ekstremum:

Jeżeli pochodna funkcji f zmienia w punkcie x0 znak z dodatniego na ujemny, to funkcja f ma w tym punkcie maksimum, a jeżeli z ujemnego na dodatni, to funkcja ma w tym punkcie minimum.

Jeżeli f’(x0)=0 i pochodna funkcji f w punkcie x0 nie zmienia znaku, to w punkcie tym funkcja nie ma ekstremum.

Przeanalizuj przykład 2, 3, 4 str. 304,305

Wykonaj zadanie 1a,b str. 306

Ad. 9

Można wyznaczać wartość najmniejszą funkcji i największą funkcji w pewnym przedziale.

Przeanalizuj przykład 1 i 2 str. 307,308

Wykonaj zadanie 1a str. 308

Ad.10

Aby naszkicować wykresy wielu funkcji badamy przebieg zmienności funkcji wg poniższego schematu:

1. Określamy dziedzinę funkcji.
2. Znajdujemy punkty przecięcia wykresu z osiami układu współrzędnych.
3. Obliczamy granice na końcach przedziałów, w których funkcja jest określona i wyznaczamy asymptoty (jeśli istnieją)
4. Wyznaczamy pochodną i określamy jej dziedzinę.
5. Wyznaczamy przedziały monotoniczności i ekstrema lokalne funkcji.

Otrzymane wyniki zbieramy w tabeli i szkicujemy wykres funkcji.

Przeanalizuj przykład 1 i 2 str. 313, 314 i wykonaj zad. 1 a str. 315