Dzień dobry,

Podaję Państwu tematy z matematyki zaplanowane na 06 i 07.03.2021r.

1. Granice jednostronne.
2. Granice niewłaściwe.
3. Ciągłość funkcji
4. Własności funkcji ciągłych.
5. Pochodna funkcji.
6. Pochodna funkcji w punkcie.

Ad. 1

Niech f będzie funkcją określoną w przedziale (x0;b). Liczba g jest granicą prawostronną (do tej liczby z prawej strony zbliża się wartość funkcji gdy x zbliża się do x0; punkt x0 może, ale nie musi należeć do dziedziny funkcji) funkcji f w punkcie x0

lim f(x) =g jeśli dla każdego ciągu xn zbieżnego do x0 gdzie xn należy do przedziału

x→x+0

(x0:b), ciąg f(xn) jest zbieżny do g.

Definicja lewostronna jest analogiczna (wartość funkcji zbliża się do x0 z lewej strony x→x-0 )

Granice prawostronna i lewostronna funkcji f nazywane są granicami jednostronnymi funkcji w punkcie x0.

Przykład:

lim (√x +1) = lim √x + lim 1 = 0+1=1

x→0+ x→0+ x→0+

Granica lim f(x) istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją granice jednostronne lim f(x)

x→x0 x→x-0

i lim f(x) oraz zachodzi równość:

x→x+0

lim f(x) = lim f(x)

x→x-0 x→x+0

Zatem

lim f(x) = a przy x→x0 wtedy i tylko wtedy, gdy lim f(x) = a przy x→x-0 i lim f(x) = a przy x→x+0

Przeanalizuj temat oraz przykłady zawarte w podręczniku str. 267-268.

Wykonaj zadanie 1 str. 268.

Ad. 2

Funkcja f ma w punkcie x0 granicę niewłaściwą ∞ (lim f(x) = ∞), jeśli dla każdego ciągu xn

x→x0

zbieżnego do x0, o wyrazach należących do dziedziny funkcji f i różnych od x0, ciąg f(xn) jest rozbieżny do ∞.

Przykład

Funkcja f(x) =-1/(x-2)2 dla x należącego R\{2}, ma w punkcie x0=2 granicę niewłaściwą równą - ∞, co zapisujemy:

lim -1/(x-2)2 = -∞

x→2

Dla funkcji f(x) = 1/x-1, x należy do R\{1} nie istnieje granica lim f(x).

x→1

Istnieją natomiast granice niewłaściwe jednostronne w punkcie x0=1

lim 1/x-1 = - ∞ lim 1/x-1 = ∞

x→1- x→1+

Jeśli granica f(x) , gdy x dąży do x0 =0+ oraz granica g(x) =a>0 to granica ilorazu funkcji g(x) i f(x) = ∞.

Jeśli granica f(x) , gdy x dąży do x0 =0+ oraz granica g(x) =a<0 to granica ilorazu funkcji g(x) i f(x) = - ∞.

Jeśli granica f(x) , gdy x dąży do x0 =0- oraz granica g(x) =a>0 to granica ilorazu funkcji g(x) i f(x) = - ∞.

Jeśli granica f(x) , gdy x dąży do x0 =0- oraz granica g(x) =a<0 to granica ilorazu funkcji g(x) i f(x) = ∞.

Jeśli granica f(x) , gdy x dąży do x0 =∞ oraz granica g(x) =∞ to granica sumy funkcji g(x) i f(x) = ∞.

Jeśli granica f(x) , gdy x dąży do x0 =- ∞ oraz granica g(x) =- ∞ to granica sumy funkcji g(x) i f(x) = - ∞.

Jeśli granica f(x) , gdy x dąży do x0 =∞ oraz granica g(x) = a to granica sumy funkcji g(x) i f(x) = ∞.

Jeśli granica f(x) , gdy x dąży do x0 =- ∞ oraz granica g(x) = a to granica sumy funkcji g(x) i f(x) = - ∞.

Przeanalizuj temat i przykłady w podręczniku str.269-272 i wykonaj zadanie 1 str. 272

Ad. 3

Funkcja f: (a:b)→R jest ciągła w punkcie x0 należącego do przedziału (a;b) wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje granica lim f(x) oraz lim f(x) = f(x0).

x→x0 x→x0

Przykład

Funkcja f(x) = 1/2x+1 jest ciągła w punkcie x0=4 gdyż lim (1/2x+1) =3 oraz f(4) =3.

x→4

Przykład

Dla jakiej wartości parametru a funkcja f jest ciągła w punkcie x0 = ½?

4x2-1/4x-2 dla x≠1/2

f(x) =

a dla x=1/2

Obliczamy granicę:

lim f(x) = lim 4x2-1/4x-2 = lim (2x-1)(2x+1)/2(2x-1) = lim 2x+1/2 = 1

x→1/2 x→1/2 x→1/2 x→1/2

Funkcja f jest ciągła w punkcie x0 = ½ wtedy i tylko wtedy, gdy f(1/2) =1, czyli dla a = 1.

Funkcję f: (a, b)→R nazywamy ciągłą, jeżeli jest ciągła w każdym punkcie przedziału (a; b).

Tw. Jeśli funkcje f i g są ciągłe w punkcie x0, to funkcja:

f+g jest ciągła w punkcie x0,

f-g jest ciągła w punkcie x0,

f\*g jest ciągła w punkcie x0,

f/g jest ciągła w punkcie x0, pod warunkiem, że g(x0) ≠ 0.

Przeanalizuj temat i przykłady (podręcznik str. 278-280 i wykonaj zad 1 a,b str. 281

Ad.4

Twierdzenie o przyjmowaniu wartości pośrednich

Jeśli funkcja f: <a; b> → R (przedział domknięty) jest ciągła oraz f(a) ≠ f(b), to funkcja ta przyjmuje w przedziale (a; b) każdą wartość liczbową p znajdującą się między liczbami f(a) i f(b).

Ad. 5

Tw. Współczynnik kierunkowy prostej y=ax+b jest równy tangensowi kąta alfa, jaki ta prosta tworzy z osią OX: tg alfa = a

Współczynnik kierunkowy obliczymy ze wzoru a= y2-y1/x2-x1 gdzie (x1,y1) oraz (x2,y2) to pary punktów, przez które przechodzi prosta.

Ad.6

Def. Jeśli istnieje skończona granica lim f(x)-fx0)/x-x0 to granicę tę nazywamy

x dąży do x0

pochodną funkcji f w punkcie x0 i oznaczamy f’(x0)

f’(x0)= lim f(x)-fx0)/x-x0

x dąży do x0

Przeanalizuj przykład 1 str. 285

Oblicz pochodną funkcji f(x) = x2

Oblicz pochodną funkcji f(x) = x3

Na razie obliczamy zgodnie z definicją czyli korzystamy ze wzoru

f’(x0)= lim f(x)-fx0)/x-x0

x dąży do x0